第４講　図形と方程式

1　xy 平面上の円 $x^2+y^2=1$ へ，この円の外部の点 P$(a,\ b)$ から２本の接線を引き，その接点を A，B とし，線分 AB の中点を Q とする．

(1)　点 Q の座標を a，b を用いて表せ．

(2)　点 P が円 $(x-3)^2+y^2=1$ の上を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　x の2次関数 $f(x)=x^2+ax+b$ の最小値を M とする．$0 \leqq f(0) \leqq 5$，$1 \leqq f(1) \leqq 3$ であるとき，M の最大値と最小値，およびそれらを与える x の値を求めよ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　xy 平面上の放物線

$$A : y = x^2,\ B : y = -(x-a)^2 + b$$

は異なる 2 点 $P(x_1,\ y_1)$, $Q(x_2,\ y_2)$ $(x_1 > x_2)$ で交わるとする.

(1)　$x_1 - x_2 = 2$ が成り立つとき, b を a で表せ.

(2)　$x_1 - x_2 = 2$ を満たしながら a, b が変化するとき, 直線 PQ の通過する領域を求め, 図示せよ.

(3)　PQ$=2$ を満たしながら a, b が変化するとき, 線分 PQ の中点の y 座標の最小値を求めよ.

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第4講　図形と方程式

$\boxed{1}$ xy 平面上の円 $x^2+y^2=1$ へ，この円の外部の点 $P(a,\ b)$ から2本の接線を引き，その接点を A，B とし，線分 AB の中点を Q とする．

(1) 点 Q の座標を a，b を用いて表せ．

(2) 点 P が円 $(x-3)^2+y^2=1$ の上を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ．

(1) $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ とおくと，A，B における円 $x^2+y^2=1$ の接線はそれぞれ

$$x_1x+y_1y=1,\quad x_2x+y_2y=1$$

これらがともに $P(a,\ b)$ を通るので

$$x_1a+y_1b=1,\quad x_2a+y_2b=1 \quad より \quad ax_1+by_1=1,\quad ax_2+by_2=1$$

この2式は，方程式 $ax+by=1$ が $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ を通ることを示している．

よって，直線 AB の方程式は $ax+by=1$ ……①である．

また，直線 OP の方程式は $bx-ay=0$ ……②であり，円の性質により点 Q は①と②の交点である．

①，②より　$x=\dfrac{a}{a^2+b^2}$，$y=\dfrac{b}{a^2+b^2}$　　よって　$\boldsymbol{Q\left(\dfrac{a}{a^2+b^2},\ \dfrac{b}{a^2+b^2}\right)}$

(2) $Q(x,\ y)$ とおくと，$x=\dfrac{a}{a^2+b^2}$，$y=\dfrac{b}{a^2+b^2}$

$x^2+y^2=\dfrac{1}{a^2+b^2}$　$x^2+y^2\neq 0$ であるから　$a^2+b^2=\dfrac{1}{x^2+y^2}$

よって　$a=\dfrac{x}{x^2+y^2}$

$P(a,\ b)$ が円 $(x-3)^2+y^2=1$ の上を動くとき

$(a-3)^2+b^2=1$　より　$a^2-6a+8+b^2=0$

$$\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{6x}{x^2+y^2}+8=0$$

$$\left(x-\frac{3}{8}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{8}\right)^2$$

よって求める軌跡は，**中心 $\left(\dfrac{3}{8},\ 0\right)$，半径 $\dfrac{1}{8}$ の円**

$\boxed{2}$ x の2次関数 $f(x)=x^2+ax+b$ の最小値を M とする．$0\leqq f(0)\leqq 5$，$1\leqq f(1)\leqq 3$ であるとき，M の最大値と最小値，およびそれらを与える x の値を求めよ．

$f(x)=x^2+ax+b=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+b$ より

$f(x)$ の最小値は $x=-\dfrac{a}{2}$ のとき　$M=-\dfrac{a^2}{4}+b$　……①

また，$0\leqq f(0)\leqq 5$ より　$0\leqq b\leqq 5$　……②

$1\leqq f(1)\leqq 3$ より　$0\leqq a+b\leqq 2$　……③

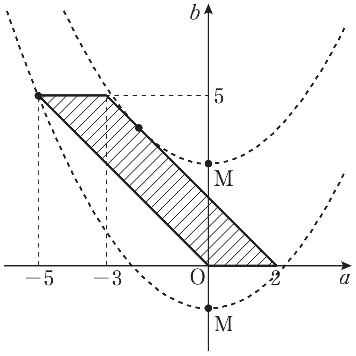
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

②, ③を満たす点$(a,\ b)$の存在範囲は右下図斜線部分（境界含む）であり，これをDとする.

$b=\dfrac{1}{4}a^2+M$　（下に凸の放物線）がDを通るときの,

頂点のy座標Mの最大値，最小値を求める.

Mが最大となるのは，この放物線が直線$a+b=2$に接するときである.



$b=\dfrac{1}{4}a^2+M$と$a+b=2$よりbを消去し，aについて整理した方程式

$$a^2+4a+4M-8=0 \quad より \quad (a+2)^2+4M-12=0$$

において重解$a=-2$をもつのは，$M=3$のときであり，

これは領域D内にある．また，$x=-\dfrac{a}{2}=1$

Mが最小となるのは，放物線が点$(-5,\ 5)$を通る場合である.

つまり$a=-5$，$b=5$であり，このとき①より$M=-\dfrac{5}{4}$．また，$x=-\dfrac{a}{2}=\dfrac{5}{2}$

以上より，Mの最大値は **3**　$(\boldsymbol{x=1})$　　　Mの最小値は $\boldsymbol{-\dfrac{5}{4}}$　$\left(\boldsymbol{x=\dfrac{5}{2}}\right)$

3　xy平面上の放物線

$$A:y=x^2,\ B:y=-(x-a)^2+b$$

は異なる 2 点$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$　$(x_1>x_2)$で交わるとする.

(1)　$x_1-x_2=2$が成り立つとき，bをaで表せ.

(2)　$x_1-x_2=2$を満たしながらa，bが変化するとき，直線PQの通過する領域を求め，図示せよ.

(3)　PQ$=2$を満たしながらa，bが変化するとき，線分PQの中点のy座標の最小値を求めよ.

---

(1)　2 つの放物線A，Bの方程式からyを消去してxについて整理した方程式

$2x^2-2ax+a^2-b=0$の 2 実数解がx_1，x_2　$(x_1>x_2)$であることより,

$$x_1=\frac{a+\sqrt{-a^2+2b}}{2},\quad x_2=\frac{a-\sqrt{-a^2+2b}}{2}$$

よって　$x_1-x_2=2$より，$\sqrt{-a^2+2b}=2$であるから，$2b-a^2=4$　　$\boldsymbol{b=\dfrac{1}{2}a^2+2}$

(2)　2 点 P，Q を通る図形の式は,

$$(x^2-y)+k\{-(x-a)^2-y+b\}=0$$

$$(-1-k)y+(1-k)x^2+2akx-a^2k+bk=0$$

と表すことができる．これが直線を表すのは$k=1$のときで，このとき,

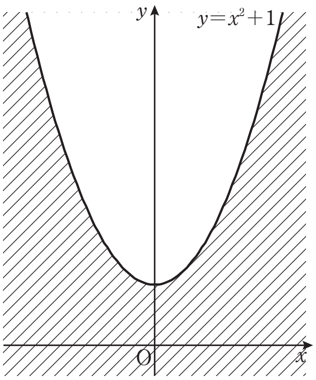
直線PQ：$2y=2ax-a^2+b$　……①　である.

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$(x,\ y)$ が①上の点であるということは，①を満たす実数 a が存在するということである．
①に(1)の結果を代入し，a について整理した式　$a^2-4ax+4y-4=0$　を a の 2 次方程式とみて，判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(-2x)^2-(4y-4)\geqq 0$$

ゆえに，求める領域は，$\boldsymbol{y\leqq x^2+1}$
(右図斜線部分．境界含む．)



(3)　①より直線 PQ の傾きは a である．よって，

$$\begin{aligned}PQ^2&=(x_1-x_2)^2+\{a(x_1-x_2)\}^2\\&=(1+a^2)(x_1-x_2)^2\\&=(1+a^2)(-a^2+2b)\end{aligned}$$

PQ＝2 より，$(1+a^2)(2b-a^2)=4$　……②
また，PQ の中点の y 座標は

$$\frac{x_1{}^2+x_2{}^2}{2}=\frac{(x_1-x_2)^2+2x_1x_2}{2}$$

$$=\frac{2b-a^2+2\cdot\dfrac{a^2-b}{2}}{2}=\frac{b}{2}$$

②より　$b=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{1+a^2}+a^2\right)$　これと（相加平均）≧（相乗平均）より

$$\frac{b}{2}=\frac{1}{4}\left(a^2+\frac{4}{1+a^2}\right)=\frac{1}{4}\left(1+a^2+\frac{4}{1+a^2}-1\right)$$

$$\geqq\frac{1}{4}\left(2\sqrt{(1+a^2)\cdot\frac{4}{1+a^2}}-1\right)=\frac{3}{4}$$

等号成立は　$1+a^2=\dfrac{4}{1+a^2}$　より　$(1+a^2)^2=4$　　$1+a^2=2$　　$a=\pm1$ のとき

以上より，求める最小値は　$\boldsymbol{\dfrac{3}{4}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　実数 t は $t>1$ を満たすとする．点 $\left(\frac{1}{2},\ t\right)$ から，円 $x^2+y^2=1$ に相異なる２本の接線を引き，２つの接点を通る直線を m とする．

(1)　直線 m の方程式を t を用いて表せ．

(2)　t を $t>1$ の範囲で動かすとき，t によらず m が通る点がある．この点の座標を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　O を原点とする xy 平面において，直線 $y=1$ の $|x|\geqq 1$ を満たす部分を D とする．

(1)　D 上に点 $\mathrm{A}(t,\ 1)$ をとるとき，線分 OA の垂直二等分線の方程式を求めよ．

(2)　点 A が D 全体を動くとき，線分 OA の垂直二等分線が通過する範囲を求め，それを図示せよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第４講　図形と方程式　　練習問題　解答

1　実数 t は $t>1$ を満たすとする．点 $\left(\frac{1}{2},\ t\right)$ から，円 $x^2+y^2=1$ に相異なる２本の接線を引き，２つの接点を通る直線を m とする．

(1)　直線 m の方程式を t を用いて表せ．

(2)　t を $t>1$ の範囲で動かすとき，t によらず m が通る点がある．この点の座標を求めよ．

解答例

明らかに「円外の点」であることがわかる．

(1)　点 $\left(\frac{1}{2},\ t\right)$ $(t>1)$ から円 $x^2+y^2=1$ に引いた２本の接線と円との接点を $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ とすると，２本の接線は

$x_1x+y_1y=1$，$x_2x+y_2y=1$　と表せる．

これらがともに $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\ t\right)$ を通るので

$x_1\cdot\frac{1}{2}+y_1\cdot t=1$，$x_2\cdot\frac{1}{2}+y_2\cdot t=1$

したがって　$\frac{1}{2}x_1+ty_1=1$，$\frac{1}{2}x_2+ty_2=1$

「極線」をモチーフとするこの問題を通じ，考え方を定着させよう．

この２式は，方程式 $\frac{1}{2}x+ty=1$ が $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を通ることを示している．

よって，直線 m の方程式は $\boldsymbol{\frac{1}{2}x+ty=1}$　$(x+2ty-2=0)$

(2)　$x+2ty-2=0$　つまり　$(x-2)+2yt=0$

これが任意の実数 t で成り立つための条件は $x-2=0$ かつ $2y=0$

つまり　$x=2$　かつ　$y=0$

よって，t によらず m は，定点 $\mathbf{(2,\ 0)}$ を通る．

2　O を原点とする xy 平面において，直線 $y=1$ の $|x|\geqq 1$ を満たす部分を D とする．

(1)　D 上に点 $\mathrm{A}(t,\ 1)$ をとるとき，線分 OA の垂直二等分線の方程式を求めよ．

(2)　**応用**　点 A が D 全体を動くとき，線分 OA の垂直二等分線が通過する範囲を求め，それを図示せよ．

解答例

(1)　求める直線は，線分 OA の中点 $\left(\frac{t}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ $(|t|\geqq 1)$ を通り，OA $\left(傾き\ \frac{1}{t}\right)$ に垂直な直線である．よって，求める方程式は

$y=-t\left(x-\frac{t}{2}\right)+\frac{1}{2}$　　であるから　$\boldsymbol{y=-tx+\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}}$　…①

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2) ①より　$t^2-2xt-2y+1=0$　…②

「通過領域」の考え方を再度確認．ただし今回はパラメーターに「変域」が存在する．

$(x,\ y)$ が①上の点であるということは，②を満たす実数 t が $|t|\geqq 1$ に少なくとも１つ存在するということである．

ここで　$f(t)=t^2-2xt-2y+1$

$=(t-x)^2-x^2-2y+1$　とおくと，$f(t)$ のグラフの軸：$t=x$ であり

$f(-1)=2x-2y+2$　　$f(1)=-2x-2y+2$

満たすべき条件は

$f(-1)\leqq 0$　または　$f(1)\leqq 0$　……③

または $\begin{cases} f(-1)>0 \\ f(1)>0 \\ |(\text{グラフの軸})|>1 \\ (\text{グラフの頂点の } y \text{ 座標})\leqq 0 \end{cases}$　…④

である．

いわゆる「解の存在範囲（解の配置）」の問題．ただし，「少なくとも１つ」存在するための条件であるため，範囲内に解を何個配置するかは問題ではない．
たとえば③の「$f(-1)\leqq 0$」によって，「$t\leqq -1$」に１解をもつことはわかるが，もう１解が $1\leqq t$ にあるのか否かは不問．
その上で「または」によって，条件の「重複」があっても大丈夫である記述となっている．
（③と④は明らかに排反であるため，「または」と記述しつつも重複部分は存在しない）

③より　$y\geqq x+1$　または　$y\geqq -x+1$

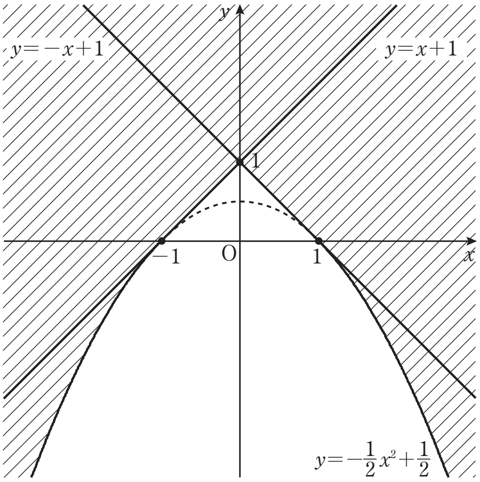
④より $\begin{cases} y<x+1 \\ y<-x+1 \\ |x|>1 \\ y\geqq -\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2} \end{cases}$

グラフからもわかるように，$y<x+1$ および $y<-x+1$ は残り２本と③で描かれる領域に「包含」されるため，最後の答えからははずしている．

よって，求める条件は

$$\boldsymbol{y\geqq x+1}\quad \textbf{または}\quad \boldsymbol{y\geqq -x+1}\quad \textbf{または}\quad \left(\boldsymbol{|x|>1}\ \textbf{かつ}\ \boldsymbol{y\geqq -\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}}\right)$$

図示すると，下図斜線部分（境界含む）．



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。